Отзыв
официального оппонента
о диссертации Сергея Викторовича Корнева
«Исследование некоторых классов дифференциальных уравнений и включений методами нелинейного анализа»,

представленной на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

По нашему глубокому убеждению, диссертация посвящена развитию важных разделов теории дифференциальных включений и управляемых систем, а также нелинейного функционального анализа и его приложений. Классическая теория степени отображения (Кронекер, Брауэр, Хопф) верой и правдой служила до тех пор, пока не появились проблемы, для решения которых применение этой теории оказалось не только затруднительным, но и вообще невозможным. На повестку дня встал вопрос о коренном пересмотре теории степени отображения с новой точки зрения. В историческом плане здесь причудливо переплетаются как результаты внутреннего развития этого раздела нелинейного анализа (теорема Какутани), так и его развития под влиянием запросов других разделов математики, в которых сплошь и рядом возникали задачи, аккуратная формулировка которых приводила к многозначным отображениям (операторные включения и дифференциальные включения). Конечно, многозначные функции изучались в математическом анализе и раньше (однозначные ветви многозначных аналитических функций и римановы поверхности в комплексном анализе). Здесь речь идет о многозначных отображениях иного сорта. Например, в теории дифференциальных уравнений начальные условия однозначно определяют решение, если правые части непрерывны по времени и липшицевы по пространственным переменным. Однако ситуация резко меняется, если правые части только непрерывны по всем переменным: в этом случае решение по-прежнему существует (теорема Пеано), но, вообще говоря, не является единственным – возникает интегральная воронка (Кнезер, Лаврентьев, Красносельский). Если ограничиться рассмотрением получающихся решений на фиксированном отрезке, то мы получим компактное связное множество в пространстве непрерывных функций. Такого вида многозначный оператор возникает в теории периодических решений дифференциальных уравнений и включений – оператор Пуанкаре (сдвига). Фундаментальная проблема, с которой автор успешно справился, заключалась в том, чтобы создать такую теорию топологической степени компактных отображений и полей, чтобы она включала в себя и рассмотренный выше пример многозначного отображения. Поэтому разработка математического аппарата для исследования многозначных отображений в конечномерных и бесконечномерных пространствах, а также приложения этого аппарата к анализу конкретных проблем несомненно являются весьма актуальными.

Если периодом зарождения теории дифференциальных включений считать тридцатые годы прошлого века, а работы французского математика А. Маршо и польского математика С. Зарембы – пионерскими, то с середины прошлого века начинается ее бурное развитие. Это связано в первую очередь с тем, что дифференциальные включения являются очень удобным аппаратом для описания управляемых систем различных классов, систем с разрывными характеристиками, изучаемых в ряде разделов теории оптимального управления, математической экономики, математической физики и др. В силу этого, задачи о периодических колебаниях, о глобальной структуре множества периодических решений, об асимптотическом поведении решений для систем такого рода являются весьма актуальными.

Все утверждения диссертации, включая различные леммы и теоремы, абсолютно строго доказаны. Основные достижения диссертации являются новыми и состоят в разработке на основе развития теории топологической степени для новых классов мультиотображений метода направляющих функций трех новых типов: направляющих функций на заданном множестве, интегральных и многолистных направляющих функций; получении новых приложений разработанных методов к задачам о существовании периодических и ограниченных решений, о качественном поведении решений дифференциальных уравнений и включений.

Каждая из составных частей диссертации представляет собой непреходящую ценность для науки:

во-первых, теория топологической степени перенесена на новые классы мультиотображений в конечномерных и бесконечномерных пространствах;

во-вторых, сила и универсальность построенной теории всесторонне продемонстрирована на примере разработки существенно новых подходов к исследованию динамических систем, описываемых дифференциальными и функционально-дифференциальными уравнениями и включениями, на основе трех выше перечисленных новых классов направляющих функций. Указанные подходы и различные их модификации, применяются к задачам о периодических решениях различных классов дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений и включений (как с выпуклозначной правой частью, так и с правой частью, не обладающей свойством выпуклости значений), об асимптотическом поведении решений и о бифуркации периодических решений.

Диссертация состоит из введения, пяти глав, содержащих 13 параграфов, и списка цитируемой литературы, включающего 155 наименований. Объем работы – 272 страницы.

Во введении дается краткий, но обстоятельный обзор исследований по геометрическим и топологическим методам в теории многозначных отображений, а также по методу направляющих функций. Здесь же формулируются основные результаты диссертации, а также подчеркивается их новизна и важность.

Первая глава служит справочником по тем разделам функционального анализа, негладкого анализа, теории многозначных отображений и теории бифуркаций, которые используются в диссертации.

Вторая глава содержит изложение теории топологической степени для новых классов многозначных векторных полей, отвечающих новым классам многозначных отображений, причем сначала кратко напоминаются основные факты теории топологической степени для однозначных непрерывных векторных полей в конечномерном пространстве, потом для многозначных векторных полей – то же в конечномерном пространстве, затем для многозначных компактных векторных полей в банаховом пространстве и завершается глава развитием теории степени совпадения для многозначных отображений. Основной стержень всех этих построений – это компактность.

Основные достижения предыдущего этапа связаны с выпуклозначными отображениями и полями. Однако, к сожалению, в целом ряде практически важных задач это требование выпуклости образов не выполнено, а если его и налагать, то задача принимает искусственный характер.

Какие же классы отображений рассмотрены в диссертации? Во-первых, это многозначные отображения, допускающие ε-аппроксимацию однозначными непрерывными отображениями в метрическом пространстве графиков (сюда попадает и рассмотренный выше многозначный оператор Пуанкаре). Во-вторых, это достаточно широкий класс многозначных отображений, допускающих непрерывные сечения.

Третья, четвертая и пятая главы показывают, как развитый во второй главе математический аппарат исследования многозначных отображений находит применение при изучении различных категорий задач как для дифференциальных уравнений, так и для дифференциальных включений. Стоит подчеркнуть, что это только один из возможных путей приложения созданной во второй главе теории.

В основу изложения положено дальнейшее развитие метода направляющих функций, впервые опубликованного М.А. Красносельским и А.И. Перовым в 1958 году.

Первым типом рассматриваемых задач является задача о периодических решениях систем, описываемых дифференциальными включениями как с выпуклозначной правой частью, так и с правой частью, не обладающей свойством выпуклости значений.

Для эффективного решения этой задачи применяется модификация классического понятия направляющей функции – направляющая функция на заданном множестве. Существенным преимуществом по сравнению с классическим подходом является возможность "локализовать" проверку основного условия "направляемости" на области пространства, зависящей от самой направляющей функции.

В четвертой главе диссертации рассматривается также задача о периодических решениях систем, описываемых функционально-дифференциальными включениями как с выпуклозначной правой частью, так и с правой частью, не обладающей свойством выпуклости значений. Для ее решения был введен новый класс направляющих функций – интегральные направляющие функции. Существенным развитием метода интегральных направляющих функций является его обобщение на включения с каузальными операторами.

Изложение пятой главы всецело посвящено различным обобщениям предложенного в свое время Д.И. Рачинским (1996) метода многолистной векторной направляющей функции (в простейшем случае роль такой направляющей функции играют полярный угол в цилиндрической системе координат). В диссертации показано, что не только известные ранее результаты беспрепятственно могут быть перенесены с дифференциальных уравнений на дифференциальные включения – это, вообще-то, понятно, но и приведён целый ряд новых теорем существования периодических решений, значительно расширив инструментарий – это и обобщенные направляющие функции, это и наборы направляющих функций, это и использование правильных направляющих функций и т.д. и т.п.

В классических работах по методу направляющих функций, как правило, предполагается, что эти функции являются гладкими на всем фазовом пространстве. Это условие может представиться ограничительным, например, в таких ситуациях, когда направляющие потенциалы различны в различных областях пространства. Ослабляя требование гладкости в духе работ Иошидзавы и Кларка, диссертант рассматривает негладкие направляющие потенциалы для каждого класса направляющих функций и их обобщенные градиенты.

Универсальность рассматриваемых в диссертации методов позволяет применять их и к задаче о существовании ограниченных решений дифференциальных уравнений и включений, а также функционально-дифференциальных уравнений и включений различных классов.

Третьим типом рассматриваемых задач является исследование асимптотического поведения решений дифференциальных и функционально-дифференциальных включений различных классов. Разработанные в диссертации методы позволяют получить существенно новые оценки норм траекторий соответствующих дифференциальных включений.

Завершается ряд рассматриваемых в диссертации проблем задачей о бифуркации периодических решений дифференциальных уравнений и включений. Для ее решения предлагается новый подход на основе понятия многолистной направляющей функции, позволяющий значительно облегчить нахождение ключевой характеристики задачи – бифуркационного индекса.

Необходимо подчеркнуть, что значительная часть результатов, полученных в диссертационной работе для дифференциальных включений, является новой и для теории дифференциальных уравнений.

Переходя к оценке диссертации в целом, нужно сказать, что она полностью выполнена в духе математической школы, созданной в стенах Воронежского университета. Посвященная одной из интереснейших задач нелинейного анализа, она демонстрирует великолепное владение автором современным материалом по теории многозначных отображений и дифференциальных включений. Диссертация воспринимается как законченное научное произведение.

В качестве пожелания, впрочем, вполне очевидного, можно посоветовать в дальнейшем обратить внимание на произвольные краевые задачи на конечном промежутке, а не только периодические краевые задачи – как это сделано в диссертации.

Диссертация написана по четкому прозрачному плану и хорошо отредактирована. Стилистика и грамотность диссертационной работы выше всех похвал. Приведем замеченные опечатки и неточности:

- стр. 26, строка снизу 12: в теореме 1.2.16 используется известный, но неопределенный ранее символ сужения на подпространство;
- стр. 45, строка сверху 4: топологическая степень $\deg(\varphi, \overline{U}_j)$ отлична от нуля – эту фразу нужно изъять;
- стр. 47, строка снизу 13: стягиваемо по U к точке – нужно добавить к точке x_0;
- стр. 62, строка сверху 1: при обозначении композиции отображений пропущен знак композиции – $\circ$;
- стр. 84, строка снизу 2: $p : E_1 \to E_2$ и $q : E_1 \to E_2$, а должно быть $p : E_1 \to E_1$, $q : E_2 \to E_2$;
- стр. 94, строка сверху 10: определение 3.1.4 направляющей функции для включения с нормальной правой частью аналогично определению направляющей функции для включения, удовлетворяющего верхним условиям Каратеодори, поэтому было бы достаточно привести его один раз;
- стр. 133, строка снизу 1: пропущен знак множества в определении функции $\gamma(\cdot)$;
- стр. 152, строка снизу 3: в цепочке равенств второе выражение лишнее;
- стр. 216, строка снизу 10: вместо v в сумме и $v \in \partial V_i(\zeta)$ должно быть v_i в обоих случаях;
- стр. 219, строка снизу 9: то же самое и в сумме не проставлены границы изменения индекса i=1;
- стр. 258, строка 1 снизу: у систем – должно быть у системы;

Следует отметить, что обозначенные недостатки не снижают общего хорошего впечатления о работе и ее научной ценности.

Основные результаты диссертации своевременно опубликованы в журналах, входящих в перечень рецензируемых журналов и изданий, рекомендованный ВАК РФ. Работа была апробирована на целом ряде семинаров и конференций, в том числе международного уровня. Автореферат правильно и с достаточной полнотой отражает основное содержание диссертации.

Считаю, что диссертация Сергея Викторовича Корнева «Исследование некоторых классов дифференциальных уравнений и включений методами нелинейного анализа» удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым ВАК РФ к докторским диссертациям, в том числе п. 9 Положения о порядке присуждения ученых степеней, а ее автор безусловно заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Доктор физико-математических наук, профессор
кафедры нелинейных колебаний ФГБОУ ВО
«Воронежский государственный университет» ________________ А.И. Перов

394018, г. Воронеж, Университетская пл., 1, ВГУ
Тел. +7(473) 274-14-85.
Email: anperov@mail.ru

федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Воронежский государственный университет»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)
Подпись Перова А.И.
заверяю вед. специалист
должность
Сеникая 14.02.2017
подпись, расшифровка подписи